



Logické základy číslicových počítačů

1. přednáška

Informatika



Číselné sústavy

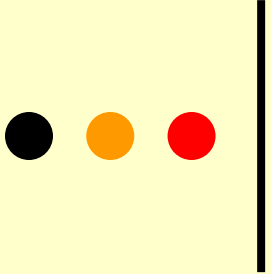
***Číselná sústava je systém
zobrazenia ľubovoľného čísla
pomocou určitého počtu znakov***

Číselné sústavy

⇒ nepozičné:

- V období Rímskej ríše alebo antického Grécka sa používali **rímske číslice**, ktorých hodnota nezávisí od pozície, kde sa číslica v čísle nachádza.
- Obrazy rímskych a desiatkových číslic udáva nasledujúca tabuľka:

Desiatkové číslo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rímska číslica	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Desiatkové číslo	10	50	100	500	1000				
Rímska číslica	X	L	C	D	M				



Číselné sústavy

⇒ **pozičné:**

- čísla a ich zápis, ako ich poznáme dnes, zaviedli Arabi,
- zápis čísel pomocou znakov 0 až 9 a ich **pozíciou** sa vyjadrujú jednotky, stovky, desiatky atď.
- pozičná číselná sústava je taká, ktorá vyjadruje ľubovoľné číslo N polynómom:

$$N = Z_n P^n + Z_{n-1} P^{n-1} + \dots + Z_1 P^1 + Z_0 P^0 + Z_{-1} P^{-1} + Z_{-2} P^{-2} + \dots +$$

$$+ Z_{-m} P^{-m} = \sum_{i=-m}^n Z_i P^i$$

kde: P – základ číselnej sústavy,
 Z_i – znaky použiteľné v danej ČS
 $i \in \langle -m, n \rangle$.



Základ ČS

- může být ľubovoľné číslo,
- praktický význam z hľadiska informatiky majú len niektoré číselné sústavy:
 - **desiatková (dekadická)** – základ ČS = 10
použitelné znaky: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
 - **dvojková (binárna)** – základ ČS = 2
použitelné znaky: 0,1
 - **osmičková (oktálová)** – základ ČS = 8
použitelné znaky: 0,1,2,3,4,5,6,7
 - **šestnástková (hexadecimálna)** – základ ČS = 16
použitelné znaky: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F.

Desiatková ČS

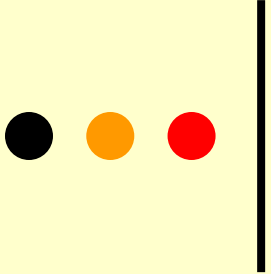
- V bežnom živote sa pri výpočtoch najčastejšie stretávame s *desiatkovou číselnou sústavou*, ktorá na zápis čísla používa **10 znakov** (čísllice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9).

Napr. desiatkové číslo 328,75 môžeme zapísať ako:
 $3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$

- Úplný zápis každého desiatkového čísla môžeme zapísať pomocou polynómu:

$$Z_n 10^n + Z_{n-1} 10^{n-1} + Z_{n-2} 10^{n-2} + \dots + Z_1 10^1 + Z_0 10^0 + Z_{-1} 10^{-1} + Z_{-2} 10^{-2} + \dots + Z_{-m+1} 10^{-m+1} + Z_{-m} 10^{-m}$$

**Základ číselnej sústavy
P = 10**



Dvojková číselná sústava

- *dvojková (binárna) číselná sústava* má význam od obdobia vzniku prvých elektronických počítačov,
- elektronické konštrukčné prvky počítačov sú najrýchlejšie a najspoľahlivejšie tie, ktoré majú dva stabilné stavy,
- tieto fyzikálne prvky svojou činnosťou priamo modelujú znaky dvojkovej číselnej sústavy,
- všetky informácie aj v súčasnom počítači sú uložené pomocou dvoch znakov: **0** a **1** (nie je napätie = **0**, je napätie = **1**).

Základnú jednotku informácie nazývame **1 bit** (z angl. binary digit – binárne číslo).



Zápis čísel v dvojkovej číselnej sústave

P = 10	P = 2	
0	0.2^0	0
1	1.2^0	1
2	$1.2^1+0.2^0$	10
3	$1.2^1+1.2^0$	11
4	$1.2^2+0.2^1+0.2^0$	100
5	$1.2^2+0.2^1+1.2^0$	101
6	$1.2^2+1.2^1+0.2^0$	110
7	$1.2^2+1.2^1+1.2^0$	111
8	$1.2^3+0.2^2+0.2^1+0.2^0$	1000
9	$1.2^3+0.2^2+0.2^1+1.2^0$	1001
10	$1.2^3+0.2^2+1.2^1+0.2^0$	1010

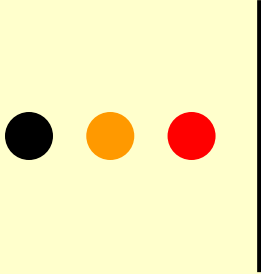


Osmičková a šestnástková ČS

- Základ *osmičkovej* (oktálovej) číselnej sústavy je $P = 8$, povolené znaky Z_i sú číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
- Základ *šestnástkovej* (hexadecimálnej) číselnej sústavy je $P = 16$, povolené znaky Z_i sú 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.
- V polyadických číselných sústavách so základom nižším ako 10 ($P < 10$) nie sú problémy s definovaním znakov Z_i – ich súbor je podmnožinou desiatkovej sústavy, vypustením čísel vyšších a rovných základu.
- V šestnástkovej číselnej sústave je potrebné k súboru znakov desiatkovej sústavy pridať ešte šesť znakov – písmená veľkej abecedy.

Zápisy čísel v osmičkovej a šestnástkovej ČS

P = 10	P = 8		P = 16	
0	0.8 ⁰	0	0.16 ⁰	0
1	1.8 ⁰	1	1.16 ⁰	1
2	2.8 ⁰	2	2.16 ⁰	2
3	3.8 ⁰	3	3.16 ⁰	3
4	4.8 ⁰	4	4.16 ⁰	4
5	5.8 ⁰	5	5.16 ⁰	5
6	6.8 ⁰	6	6.16 ⁰	6
7	7.8 ⁰	7	7.16 ⁰	7
8	1.8 ¹ +0.8 ⁰	10	8.16 ⁰	8
9	1.8 ¹ +1.8 ⁰	11	9.16 ⁰	9
10	1.8 ¹ +2.8 ⁰	12	10.16 ⁰	A
11	1.8 ¹ +3.8 ⁰	13	11.16 ⁰	B
12	1.8 ¹ +4.8 ⁰	14	12.16 ⁰	C
13	1.8 ¹ +5.8 ⁰	15	13.16 ⁰	D
14	1.8 ¹ +6.8 ⁰	16	14.16 ⁰	E
15	1.8 ¹ +7.8 ⁰	17	15.16 ⁰	F
16	2.8 ¹ +0.8 ⁰	20	1.16 ¹ +0.16 ⁰	10
17	2.8 ¹ +1.8 ⁰	21	1.16 ¹ +1.16 ⁰	11
18	2.8 ¹ +2.8 ⁰	22	1.16 ¹ +2.16 ⁰	12
19	2.8 ¹ +3.8 ⁰	23	1.16 ¹ +3.16 ⁰	13
20	2.8 ¹ +4.8 ⁰	24	1.16 ¹ +4.16 ⁰	14



ČS z hľadiska práce počítača

- Počítač pracuje s číslami v *dvojkovej* číselnej sústave.
- Dvojkové čísla sú obyčajne dlhé a neprehľadné postupnosti *núl a jednotiek*.
- Pre jednoduchší zápis dvojkových čísel sa používa *osmičková* alebo *šestnástková* číselná sústava.

Prevod medzi dvojkovou, osmičkovou a šestnástkovou sústavou je veľmi jednoduchý.

● ● ● | Prevody medzi číselnými sústavami

Prevod čísla z číselnej sústavy so základom P do desiatkovej sústavy je jednoduchý.

Prevedie sa vyčíslením výrazu:
$$N = \sum_{i=-m}^n Z_i \cdot P^i$$

Prevod čísla z dvojkovej číselnej sústavy $[1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1]_2$ do desiatkovej sústavy.

rády

$$\begin{aligned} & 9. \ 8. \ 7. \ 6. \ 5. \ 4. \ 3. \ 2. \ 1. \ 0. \\ & [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1]_2 = \\ & = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^9 = \\ & = 1 + 0 + 4 + 0 + 16 + 0 + 64 + 0 + 256 + 512 = [853]_{10} \end{aligned}$$

Prevod čísla z desiatkovej ČS do sústavy so základom P

Najlepší spôsob prevodu je delením desiatkového čísla N_{10} základom číselnej sústavy P a zaznamenávaním zvyškov po delení, ktoré sú vlastne číslom N_P v zvolenej číselnej sústave.

Prevod čísla realizujeme opakovaným delením základom P .

Príklad:

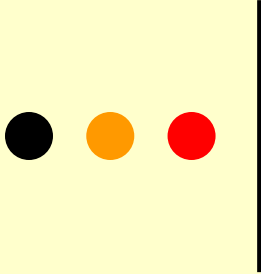
Prevod čísla $[39]_{10}$ do dvojkovej číselnej sústavy.

	Zvyšky po delení
$39 : 2 = 19$	1
$19 : 2 = 9$	1
$9 : 2 = 4$	1
$4 : 2 = 2$	0
$2 : 2 = 1$	0
$1 : 2 = 0$	1

Smer čítania čísla po prevode do číselnej sústavy o základe P

$$[39]_{10} = [1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1]_2$$

$$\begin{aligned} \text{Skúška správnosti: } & 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = \\ & = 1 + 2 + 4 + 32 = [39]_{10} \end{aligned}$$



Prevod čísla z desiatkovej ČS do sústavy so základom P

Prevod čísla z desiatkovej do osmičkovej ČS:

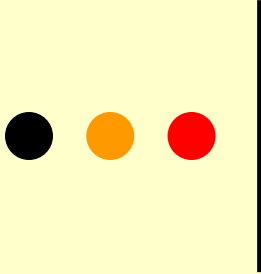
Príklad:

Prevod čísla $[250]_{10}$ do osmičkovej číselnej sústavy.

	Zvyšky po delení
$250 : 8 = 31$	2
$31 : 8 = 3$	7
$3 : 8 = 0$	3

$$[250]_{10} = [3\ 7\ 2]_8$$

Skúška správnosti: $2 \cdot 8^0 + 7 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^2 = 2 + 56 + 192 = [250]_{10}$



Prevod čísla z desiatkovej ČS do sústavy so základom P

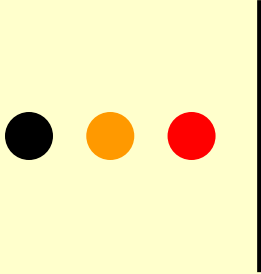
Prevod čísla z desiatkovej do šestnástkovej ČS:

Príklad:

Prevod čísla $[78]_{10}$ do šestnástkovej číselnej sústavy.

$$\begin{array}{r} 78 : 16 = 4 \\ 4 : 16 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Zvyšky po delení} \\ E (14) \uparrow \\ 4 \end{array}$$
$$[78]_{10} = [4 E]_{16}$$

$$\text{Skúška správnosti: } 14 \cdot 16^0 + 4 \cdot 16^1 = 14 + 64 = [78]_{10}$$




Prevod medzi dvojkovou, osmičkovou a šestnástkovou číselnou sústavou

Pre základy týchto sústav platí:

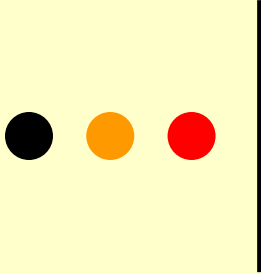
$$2^3 = 8^1$$

$$2^4 = 16^1$$



Pri prevode medzi medzi dvojkovou, osmičkovou a šestnástkovou číselnou sústavou využijeme tabuľku čísel, ktorú si vytvoríme prevodom čísel 0-15 do dvojkovej ČS

Číslo v desiatkovej ČS	Číslo v dvojkovej ČS
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111



Prevod medzi dvojkovou a osmičkovou číselnou sústavou:

Pre základy týchto sústav platí: $2^3 = 8^1$,

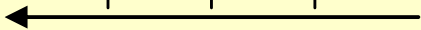
t.j. tri rády dvojkového čísla sa zobrazia jedným rádom osmičkového čísla.

Prevod čísla $[11101011010]_2$ do osmičkovej číselnej sústavy.

Postup prevodu je nasledujúci:

- číslo rozdelíme po tri číslice sprava doľava,
- každú trojicu číslic prevedieme na číslo v osmičkovej číselnej sústave.

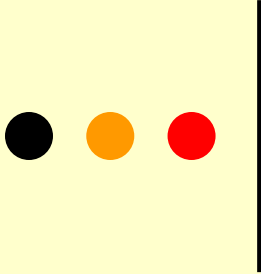
$$[\begin{array}{c|c|c|c} 11 & 101 & 011 & 010 \end{array}]_2 = [3 \ 5 \ 3 \ 2]_8$$



Prevod čísla $[351]_8$ do dvojkovej číselnej sústavy.

Postup: každú číslicu osmičkového čísla prevedieme na trojmiestne číslo do dvojkovej sústavy (zľava doplníme nuly, napr. číslo $[1]_8$ vyjadríme ako $[001]_2$).

$$[\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 1 \\ 011 & 101 & 001 \end{array}]_8 = [11 \ 101 \ 001]_2$$



Prevod medzi dvojkovou a šestnástkovou číselnou sústavou:

Pre základy týchto sústav platí: $2^4 = 16^1$,
t.j. štyri rády dvojkového čísla sa zobrazia jedným rádom šestnástkového čísla.

Prevod čísla $[11101011010]_2$ do šestnástkovej číselnej sústavy.

Postup prevodu je nasledujúci:

- číslo rozdelíme po štyri číslice sprava doľava,
- každú štvoricu číslic prevedieme na číslo v šestnástkovej číselnej sústave.

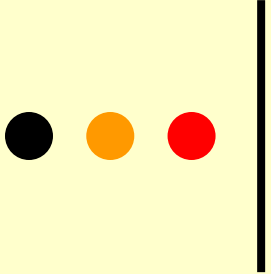
$$[\begin{array}{|c|c|c|} \hline 111 & 0101 & 1010 \\ \hline \end{array}]_2 = [7 \ 5 \ A]_{16}$$

←

Prevod čísla $[B73C]_{16}$ do dvojkovej číselnej sústavy.

Postup: každú číslicu šestnástkového čísla prevedieme na štvormiestne číslo do dvojkovej sústavy (zľava doplníme nuly, napr. číslo $[1]_{16}$ vyjadríme ako $[0001]_2$).

$$[\begin{array}{cccc} B & 7 & 1 & C \\ 1011 & 0111 & 0001 & 1100 \end{array}]_{16} = [1011 \ 0111 \ 0001 \ 1100]_2$$



Aritmetické operácie v dvojkovej ČS

- sú jednoduchšie ako v desiatkovej číselnej sústave,
- pravidlá pre vykonávanie aritmetických operácií si treba osvojiť len pre dve číslice, ktoré sa môžu vyskytnúť v jednom ráde.

Pravidlá pre aritmetické operácie v dvojkovej číselnej sústave sú nasledujúce:

Sčítanie:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 10$$

Odčítanie:

$$0 - 0 = 0$$

$$1 - 0 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

$$10 - 1 = 1$$

Násobenie:

$$0 \times 0 = 0$$

$$0 \times 1 = 0$$

$$1 \times 0 = 0$$

$$1 \times 1 = 1$$

Príklady sčítania v dvojkovej ČS

Pr.1: Sčítanie dvoch čísel $[9]_{10}$ a $[6]_{10}$ v dvojkovej číselnej sústave.

$$[6]_{10} = [110]_2$$

$$[9]_{10} = [1001]_2$$

$$[15]_{10} = [1111]_2$$

Pr.2: Sčítanie dvoch čísel $[94]_{10}$ a $[90]_{10}$ v dvojkovej číselnej sústave – *pri sčítaní dvoch jednotiek v jednom ráde vzniká tzv. prenos do vyššieho rádu.*

$$[94]_{10} = [1011110]_2$$

$$[90]_{10} = [1011010]_2$$

$$[184]_{10} = [10111000]_2$$